Теория возможностей.

В приложениях по обработке естественного языка, представлению знаний, распознаванию речи, медицинской диагностике, анализу редких событий и других смежных областях ключевую роль играет не передача информации, а ее значение. В указанных приложениях теоретико-вероятностные методы оказались неэффективными. Этим объясняется повышенный интерес к невероятностным моделям нечеткости и неопределенности, характерный для 60-х–70-х годов (см., например, [1], [2], [3], [4]).

Впервые понятие теории возможностей ввел Лотфи Заде [4], как расширение его теории нечетких множеств. В дальнейшем, Дидье Дюбуа и Генри Праде [5] внесли свой вклад в развитие теории возможностей. В 2000-х годах Юрий Петрович Пытьев [6] предложил свой вариант теории возможностей.

В первой части лекций мы рассмотрим основы теории возможностей, предложенной Л. Заде. Для этого введем понятие нечетких множеств и опишем их свойства.

1 Нечеткие множества.

В природе часто встречаются классы объектов, которые не имеют точно определяющего критерия принадлежности к этому классу. Нечеткие множества характеризуются, как класс с непрерывной степенью принадлежности.

Определение 1. *Пусть X – пространство точек или объектов с генерирующим элементом x, то есть $X = \{x\}$. Нечеткое множество или класс A в пространстве X определяется с помощью характеристической функции $f_A(x) : X \to [0, 1]$, которая ставит в соответствие каждой точке из X действительное число из отрезка $[0, 1]$, то есть $f_A(x)$ представляет степень принадлежности x множеству A.*

Таким образом, чем ближе значение $f_A(x)$ к единице, тем выше степень принадлежности элемента x множеству A. Если A – множество в обычном понимании, его характеристическая функция может принимать только два значения 0 и 1, и $f_A(x) = 1$ или 0 соответствует принадлежности или не принадлежности x множеству A.

Пример 1. *Пусть $X = \mathbb{R}$ – множество действительных чисел и A – множество чисел, намного больше 1. Тогда мы может задать характеристическую функцию $f_A(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$ следующим образом:*

$$f_A(0) = 0,\ f_A(1) = 0,\ f_A(5) = 0.01,\ f_A(10) = 0.2,\ f_A(100) = 0.95,\ f_A(500) = 1.$$

1.1 Свойства нечетких множеств.

Перейдем к описанию свойств нечетких множеств.

1. Нечеткое множество пусто тогда и только тогда, когда его характеристическая функция нулевая на X.

2. Нечеткие множества A и B равны, обозначается $A = B$, тогда и только тогда, когда $f_A(x) = f_B(x)$ для всех $x \in X$. В дальнейшем, для краткости будем писать f_A и f_B.

3. Дополнение A' к нечеткому множеству A определяется с помощью характеристической функции

$$f_{A'} = 1 - f_A.$$

4. Нечеткое множество A содержится в нечетком множестве B, обозначается, как $A \subset B$, тогда и только тогда, когда $f_A \leq f_B$.

5. Объединение двух нечетких множеств A и B есть нечеткое множество C, обозначается, как $C = A \cup B$, характеристическая функция которого определяется, как

$$f_C(x) = \max[f_A(x), f_B(x)],\ x \in X.$$

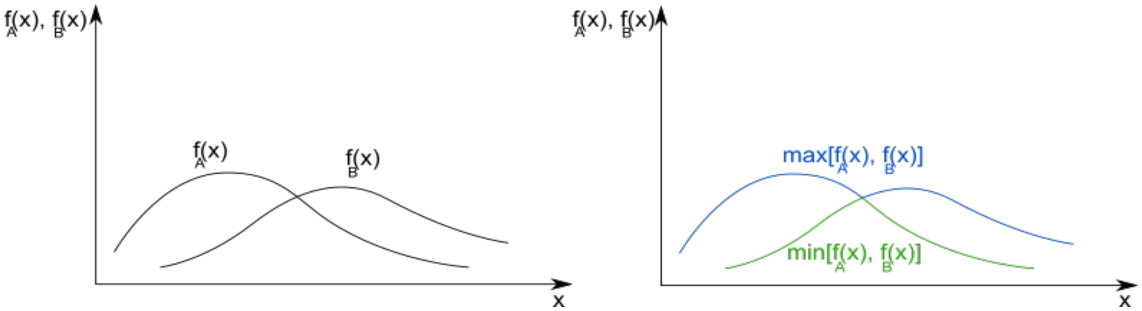
Заметим, что объединение ассоциативно, а именно:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

6. Пересечение двух нечетких множеств A и B есть нечеткое множество $C = A \cap B$, характеристическая функция которого

$$f_C(x) = \min[f_A(x), f_B(x)],\ x \in X. \tag{1}$$

Как и в случае обычных множеств, нечеткие множества A и B не пересекаются, если $A \cap B$ пусто. Пересечение, как и объединение имеет ассоциативное свойство. На следующем рисунке изображено объединение и пересечение двух нечетких множеств в пространстве действительных чисел $\mathbb{R}$.



Некоторые свойства объединения, пересечения и дополнения, определенные для обычных множеств, расширяются на случай нечетких множеств. А именно:

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B',$$

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B),$$

$$C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B).$$

Эти соотношения могут быть легко получены с помощью соответствующих равенств для характеристических функций нечетких множеств A, B и C.

Помимо операций объединения и пересечения, определим другие операции между нечеткими множествами.

7. Алгебраическим произведением нечетких множеств A и B называется нечеткое множество AB с характеристической функцией

$$f_{AB} = f_A f_B.$$

Ясно, что $AB \subset A \cap B$.

8. Алгебраической суммой нечетких множеств A и B называется нечеткое множество $A + B$ с характеристической функцией

$$f_{A+B} = f_A + f_B,$$

которое имеет смысл при условии, что сумма $f_A + f_B \leq 1$ для всех x.

9. Двойственным алгебраическим произведением нечетких множеств A и B называется

$$A \oplus B = (A'B')' = A + B - AB.$$

10. Абсолютной разностью нечетких множеств A и B называется множество $|A - B|$ с характеристической функцией

$$f_{|A-B|} = |f_A - f_B|.$$

11. Определим выпуклую комбинацию для произвольных нечетких множеств A, B и Λ с помощью отношения

$$(A, B; \Lambda) = \Lambda A + \Lambda' B,$$

где Λ' – дополнение к Λ. Запишем это равенство в терминах характеристических функций:

$$f_{(A,B;\Lambda)}(x) = f_\Lambda(x) f_A(x) + (1 - f_\Lambda(x)) f_B(x), \quad x \in X.$$

Основное свойство выпуклой комбинации выражается следующим выражением

$$A \cap B \subset (A, B; \Lambda) \subset A \cup B \text{ для всех } \Lambda,$$

которое немедленно следует из неравенства

$$\min[f_A(x), f_B(x)] \leq \lambda f_A(x) + (1 - \lambda) f_B(x) \leq \max[f_A(x), f_B(x)], \; x \in X,$$

для всех $\lambda \in [0, 1]$.

1.2 Выпуклость.

Понятие выпуклости обыкновенных множеств можно определить и для нечетких множеств с похожими свойствами. В дальнейшем, мы предполагаем, что X – это действительное евклидово пространство $\mathbb{E}^n$.
Определение 2. *Нечеткое множество A выпукло тогда и только тогда, когда множество*

$$\Gamma_\alpha = \{x \in X : f_A(x) \geq \alpha\}$$

выпукло для всех $\alpha \in (0,1]$. В терминах характеристической функции выпуклость нечеткого множества A означает выполнение неравенства

$$f_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min[f_A(x_1), f_A(x_2)] \tag{2}$$

для всех $x_1, x_2 \in X$ и $\lambda \in [0,1]$.

Заметим, что из определения выпуклости нечеткого множества не следует выпуклость характеристической функции $f_A(x)$.

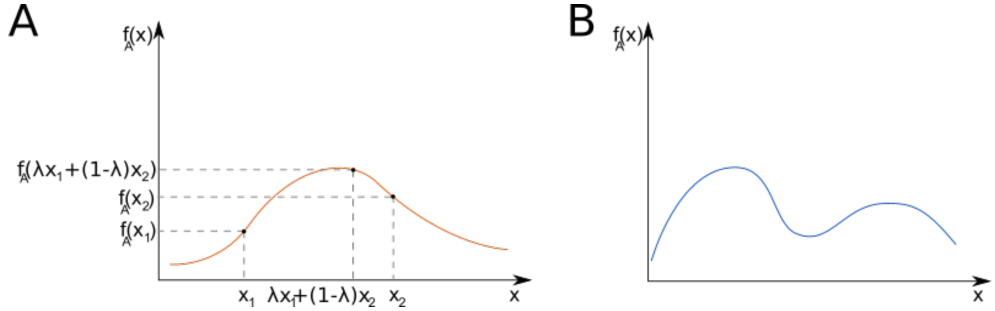


Рис. 1: На рисунке A изображено выпуклое нечеткое множество в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^1$, на рисунке B – невыпуклое.

Основное свойство выпуклых нечетких множеств выражается следующей теоремой.
Теорема 1. *Если A и B выпуклые нечеткие множества, тогда их пересечение $A \cap B$ также выпукло.*
Определение 3. *Строгая выпуклость нечеткого множества A означает выполнение строго неравенства (2).*
Определение 4. *Нечеткое множество A ограниченно тогда и только тогда, когда множество $\Gamma_\alpha = \{x \in X : f_A(x) \geq \alpha\}$ ограниченно для любого $\alpha > 0$, то есть для каждого $\alpha > 0$ существует конечное $R(\alpha)$ такое, что $\|x\| \leq R(\alpha)$ для всех $x \in \Gamma_\alpha$.*
Лемма 1. *Пусть A – ограниченное нечеткое множество и $M = \sup_{x \in X} f_A(x)$. Тогда существует по крайней мере одна точка x_0, в которой M* **существенно достигается**, *то есть для любого $\varepsilon > 0$ любая сферическая окрестность точки x_0 содержит точки множества $Q(\varepsilon) = \{x | \, f_A(x) \geq M - \varepsilon\}$.*

Доказательство проводится с помощью рассмотрения вложенной последовательности ограниченных множеств $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, где $\Gamma_n = \{x \in X | f_A(x) \geq M - M/(n+1)\}$, n=1,2,..., и применения теоремы Больцано-Вейерштрасса о предельной точке.
Определение 5. *Назовем ядром множества A, обозначим $C(A)$, множество всех точек $x \in X$, для которых M существенно достигается.*

Для выпуклых нечетких множеств выполнено следующее свойство.
Теорема 2. *[4] Если A – выпуклое нечеткое множество, тогда его ядро также выпуклое множество.*
Следствие 1. *Если $X = \mathbb{E}^1$ – множество действительных чисел и A – строго выпуклое, тогда точка, в которой M существенно достигается, единственна.*

Рассмотрим гиперплоскость $H \in \mathbb{E}^n$, которая задается уравнением $h(x) = 0$. Для обыкновенных непересекающихся множеств A и B теорема о разделяющей гиперплоскости утверждает, что существует гиперплоскость H такая, что A лежит по одну сторону от H, а B – по другую.

Хотелось бы получить подобную теорему для выпуклых ограниченных нечетких множеств A и B без требования их непересечения. Пусть K_H – число, зависящее от H такое, что $f_A(x) \leq K_H$ для x по одну сторону от

H и $f_B(x) \leq K_H$ для x по другую сторону от H. Обозначим $M_H = \inf K_H$. Число $D_H = 1 - M_H$ называется **степенью разделения** A и B с помощью H.

Следующее утверждение является расширением теоремы о разделяющей гиперплоскости для выпуклых ограниченных нечетких множеств.
Теорема 3. *Пусть A и B ограниченные выпуклые множества в $\mathbb{E}^n$, $M_A = \sup_{x \in X} f_A(x)$, $M_B = \sup_{x \in X} f_B(x)$. Обозначим M максимальную степень пересечения $A \cap B$, то есть $M = \sup_x \min[f_A(x), f_B(x)]$. Тогда $D = 1 - M$.*

Для доказательства удобно рассмотреть два случая: $M = \min(M_A, M_B)$ и $M < \min(M_A, M_B)$. Второй случай исключает возможность $A \subset B$ и $B \subset A$.

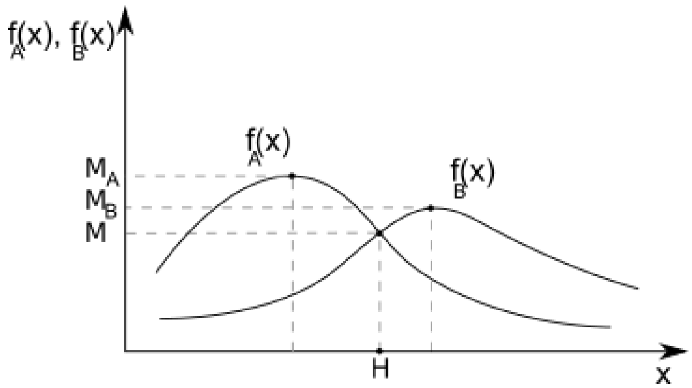


Рис. 2: Иллюстрация теоремы для нечетких множеств в одномерном пространстве $\mathbb{E}^1$, в котором гиперплоскостью H является точка.

2 Теория возможностей.

Начнем с определения распределения возможности, которое дается в терминах нечетких ограничений [7].
Определение 6. *Пусть F – нечеткое множество в пространстве U с характеристической функцией μ_F, X – объект. Тогда F называется нечетким ограничением на значениях переменной X в U, если выражение "X есть F" может быть записано в виде уравнения относительного присваивания $R(C(X)) = F$, где $C(X)$ – подразумеваемый признак переменной X.*

Если мы имеем утверждение: "Джон молод" , то оно может быть записано в виде [7]:

$$R(C(X)) = F, \tag{3}$$

где $C(X)$ – подразумеваемый признак (возраст Джона), который принимает значения в $U = [0, 100]$, F – нечеткое множество (молодой) с характеристической функцией $\mu_{\text{молодой}}(u)$, которую мы можем задать сами.

Далее для простоты $C(X) = X$.
Определение 7. *Пусть X – переменная, принимающая значения в U, F – нечеткое множество, которое действует, как нечеткое ограничение $R(X)$, то есть $R(X) = F$. Тогда распределение возможностей, ассоциированное с X, определяется*

$$\Pi_X = R(X), \tag{4}$$

а функция распределения возможностей, ассоциированная с X, численно равна характеристической функции нечеткого множества F

$$\pi_X = \mu_F. \tag{5}$$

Из (4) следует, что распределение возможностей Π_X может быть рассмотрено, как интерпретация концепции нечетких ограничений и, следовательно, математический аппарат теории нечетких множеств и правила вычисления нечетких ограничений [7] обеспечивают базис для операций над распределением возможности.

Из равенства (5) следует, что степень возможности может быть любое число из $[0, 1]$. Существование промежуточных степеней возможности возникает в таких утверждениях, как: "Вполне возможно, что Джон будет выдвинут" ,"Почти невозможно найти иглу в стоге сена" и так далее. Можно утверждать, что характеристика промежуточной степени возможности такой, как "вполне возможно" может быть интерпретирована, как "вполне вероятно". Однако, существует фундаментальная разница между возможностью и вероятностью.

Рассмотрим простой пример: "Ханс съедает X яиц на завтрак", где X принимает значения в пространстве $U = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $u \in U$. Ассоциируем распределение возможностей $\pi_X(u)$ с X, интерпретируя $\pi_X(u)$, как "степень легкости, с которой Ханс съедает u яиц на завтрак". Ассоциируем также распределение вероятностей $p_X(u)$ с X, интерпретируя $p_X(u)$, как вероятность того, что "Ханс съедает u яиц на завтрак". Используя некоторый точный или неточный критерий для оценки легкости, с которой Ханс съедает u яиц на завтрак, значения $\pi_X(u)$ и $p_X(u)$ могут принимать следующие значения:

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi_X(u)$	1	1	1	1	0.8	0.6	0.4	0.2
$p_X(u)$	0.1	0.8	0.1	0	0	0	0	0

Заметим, что в то время, как возможность, что "Ханс может съесть 3 яйца на завтрак" равна 1, вероятность этого события мала и равна 0.1. Таким образом, высокая степень возможности не влечет высокую степень вероятности. Низкая степень вероятности также не влечет низкую степень возможности. Однако, если событие невозможно, оно будет невероятным.

Дальнейшее понимания разницы между вероятностью и возможностью может быть получено с помощью сравнения мер возможности и вероятности.

2.1 Мера возможностей.

Если A – "четкое" множество в пространстве U и Π_X – распределение возможностей, ассоциированное с переменной X, которая принимает значения в U, тогда мера возможности $\pi(A)$ множества A, определяемая, как число на отрезке $[0, 1]$, задается формулой

$$\pi(A) = \sup_{u \in A} \pi_X(u), \tag{6}$$

где $\pi_X(u)$ – функция распределения возможности Π_X, определенная в (5). Это число может быть интепретировано, как возможность того, что значение X принадлежит A.

Если A – нечеткое множество, принадлежность значений X множеству A не имеет смысла. Определение меры возможности для нечетких множеств следующее.

Определение 8. *Пусть A – нечеткое множество в пространстве U и Π_X – распределение возможности, ассоциированное с переменной X, которая принимает значения в U. Мера возможности нечеткого множества A*

$$\pi(A) = Poss\{X \text{ есть } A\} = \sup_{u \in U} \min(\mu_A(u), \pi_X(u)), \tag{7}$$

где $\mu_A(u)$ – характеристическая функция нечеткого множества A.

Пусть $f_{A \cap \Pi_X}$ – характеристическая функция нечеткого множества $A \cap \Pi_X$. Из (1) следует, что определение (7) эквивалентно

$$\pi(A) = \sup_{u \in U} f_{A \cap \Pi_X}. \tag{8}$$

Пример 2. *Пусть $U = \mathbb{R}^+$, $A = \{3, 4, 5\}$ – "четкое" множество и Π_X – распределение возможностей для утверждения "X – маленькое целое число", которое мы зададим следующим образом:*

$$\Pi_X = \{1/1 \cup 1/2 \cup 0.8/3 \cup 0.6/4 \cup 0.4/5 \cup 0.2/6\}, \tag{9}$$

где, например, член $0.8/3$ означает, что возможность того, что X – это маленькое число 3, равно 0.8. Тогда, согласно (6)

$$\pi(A) = \max\{0.8, 0.6, 0.4\} = 0.8.$$

Пример 3. *Пусть $U = \mathbb{R}^+$, A – нечеткое множество немаленьких целых чисел*

$$A = \{0.2/3 \cup 0.4/4 \cup 0.6/5 \cup 0.8/6 \cup 1/7 \cup \ldots\},$$

Π_X *из (9). Тогда, согласно (7)*

$$\pi(A) = Poss\{X \text{ – \textit{немаленькое целое}}\} = \max\{0.2/3, 0.4/4, 0.4/5, 0.2/6\} = 0.4.$$

Отметим, некоторые свойства меры возможности. Если A и B произвольные нечеткие множества в пространстве U. Тогда из определения меры возможности нечеткого множества (7) следует, что

$$\pi(A \cup B) = \max(\pi(A), \pi(B)).$$

Соответствующее отношение для вероятностной меры объединения двух произвольных множеств A и B

$$p(A \cup B) \leq p(A) + p(B).$$

Мера возможности пересечения двух нечетких множеств A и B

$$\pi(A \cap B) \leq \min(\pi(A), \pi(B)).$$

Соответствующее отношение для вероятностной меры пересечения двух произвольных множеств A и B

$$p(A \cap B) \leq \min(p(A), p(B)).$$

2.2 Маргинальное распределение возможности.

Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ – нечеткая переменная размерности n, принимающая значения в пространстве $U = U_1 \times \ldots \times U_n$. Пусть Π_X – распределение возможности, ассоциированное с X, и $\pi_X(u_1, \ldots, u_n)$ – функция распределения возможности Π_X, $u_i \in U_i$.

Пусть $q = (i_1, \ldots, i_k)$ – подпоследовательность последовательности индексов $(1, \ldots, n)$, $X_q = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$.
Определение 9. *Маргинальное распределение возможности Π_{X_q} для X_q определяется, как проекция распределения Π_X на пространство $U_q = U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_k}$, то есть*

$$\Pi_{X_q} = Proj_{U_q} \Pi_X,$$

а функция маргинального распределения возможности

$$\pi_{X_q}(u_q) = \sup_{(u_{j_1}, \ldots, u_{j_m})} \pi_X(u),$$

где $u_q = (u_{i_1}, \ldots, u_{i_k})$.
Пример 4. *Предположим, что $U = U_1 \times U_2 \times U_3$, причем $U_1 = U_2 = U_3 = \{a, b\}$, а распределение возможности Π_X, $X = (X_1, X_2, X_3)$, задано следующим образом:*

$$\Pi_X = \{0.8/(a,a,a) \cup 1/(a,a,b) \cup 0.6/(b,a,a) \cup 0.2/(b,a,b) \cup 0.5/(b,b,b)\}, \tag{10}$$

где, например, $0.6/(b,a,a)$ означает, что возможность того, что $X = (X_1, X_2, X_3)$ принимает значение (b,a,a) равно 0.6. Тогда маргинальное распределение возможности для (X_1, X_2)

$$\Pi_{(X_1,X_2)} = Proj_{U_1 \times U_2} \Pi_X = \{1/(a,a) \cup 0.6/(b,a) \cup 0.5/(b,b)\}.$$

Замечание 1. *По аналогии с понятием независимых случайных переменных, нечеткие переменные $X_q = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$ и $X_s = (X_{j_1}, \ldots, X_{j_m})$ независимы тогда и только тогда, когда распределение возможности, ассоциированное с $X = (X_1, \ldots, X_n)$, есть прямое произведение распределений возможностей, ассоциированных с X_q и X_s соответственно, то есть*

$$\Pi_X = \Pi_{X_q} \times \Pi_{X_s}$$

или

$$\pi_X(u_1, \ldots, u_n) = \min(\pi_{X_q}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}), \pi_{X_s}(u_{j_1}, \ldots, u_{j_m})).$$

2.3 Условное распределение возможности.

В теории возможности понятие условного распределения возможности играет аналогичную роль, что и условное распределение вероятности в теории вероятности.

Как и раньше, $X = (X_1, \ldots, X_n)$ – нечеткая переменная размерности n, принимающая значения в пространстве $U = U_1 \times \ldots \times U_n$, Π_X – распределение возможности, ассоциированное с X, и $\pi_X(u_1, \ldots, u_n)$ – функция распределения возможности Π_X, $u_i \in U_i$.

Пусть $q = (i_1, \ldots, i_k)$ и $s = (j_1, \ldots, j_m)$ – подпоследовательности последовательности индексов $(1, \ldots, n)$, а вектор $(X_{j_1}, \ldots, X_{j_m})$ принимает значение $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_m})$.
Определение 10. *Для заданной переменной $(X_{j_1}, \ldots, X_{j_m}) = (a_{j_1}, \ldots, a_{j_m})$ условное распределение возможности относительно переменной $X_q = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$ определяется, как*

$$\Pi_{X_q}(X_{j_1} = a_{j_1}; \ldots; X_{j_m} = a_{j_m}),$$

а функция условного распределения возможности

$$\pi_{X_q}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k} | X_{j_1} = a_{j_1}; \ldots; X_{j_m} = a_{j_m}) = \pi_X(u_1, \ldots, u_n)|_{u_{j_1} = a_{j_1}, \ldots, u_{j_m} = a_{j_m}}.$$

Пример 5. *Предположим, что $U = U_1 \times U_2 \times U_3$, причем $U_1 = U_2 = U_3 = \{a, b\}$, а распределение возможности Π_X, $X = (X_1, X_2, X_3)$, задано в (10). Тогда*

$$\Pi_{(X_2, X_3)}(X_1 = a) = \{0.8/(a, a) \cup 1/(a, b)\}$$

– условное распределение возможности (X_2, X_3) для заданного $X_1 = a$.

В данной лекции мы затронули только основы теории возможности, предложенной L.A.Zadeh. В следующей части мы рассмотрим вариант теории возможности Ю.П. Пытьева [6], отличающийся от описанного выше.

Литература

[1] Leonard J. Savage, The foundations of statistics. Dover Publication, Inc., New York, 1972.

[2] A.P. Dempster, Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping, Ann. Math. Statist., V.38, 1967.

[3] G. Shafer, A mathematical theory of evidence, Princeton University Press, 1976.

[4] L.A. Zadeh, Fuzzy sets,Information and Control, V.8, 1965.

[5] D. Dubois and H. Prade, Possibility Theory, Probability Theory and Multiple-valued Logics: A Clarification, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence 32, 2001.

[6] Ю.П. Пытьев, Возможность. Элементы теории и применения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.

[7] L.A. Zadeh, Calculus of fuzzy restrictions in: L.A. Zadeh, K.S. Fu, K. Tanaka and M. Shimura, eds., Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes, Academic Press, New York, 1975.