Теория возможностей.

Во второй части лекции мы дадим эскиз теории возможностей, предложенный Ю.П. Пытьевым [1]. Его построение четко следует схеме теории вероятностей. Также покажем связь между возможностным и вероятностым пространствами.

1 Интеграл и его свойства.

Возможность события в отличии от вероятности оценивает частоту появления события в регулярном стохастическом эксперименте и ориентированна на относительную оценку истинности данного события, его предпочтительности в сравнении с любым другим событием, причем в ранговой (порядковой) шкале, в которой могут быть представлены и содержательно истолкованы лишь отношения "больше", "меньше" или "равно". А именно, в отличии от вероятности, принимающей значения в "абсолютной" шкале, возможность принимает значения в шкале $\mathcal{L} = \{[0,1], \leq, +, \bullet\}$, где сложение $+$ определено как max, а умножение $\bullet$ как min. Таким образом определенные операции сложения и умножения коммутативны, ассоциативны и дистрибутивны. Нейтральными элементами являются 0 и 1.

Обозначим $\mathcal{L}(X)$ – класс функций, определенных на X со значениями в $\mathcal{L}$, содержащий:

1. вместе с каждой фукнцией $f(\cdot)$ все функции $(a \bullet f)(\cdot)$, $a \in [0,1]$;

2. вместе с каждой парой функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ их сумму $(f+g)(\cdot)$ и произведение $(f \bullet g)(\cdot)$ и, следовательно, их линейную комбинацию;

3. вместе с каждой функцией $f(\cdot)$ ее отрицание $\overline{f(\cdot)} = 1 - f(\cdot)$;

4. вместе с любой последовательностью $f_1(\cdot), f_2(\cdot), \ldots$

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} f_n(x) = \sup_n f_n(x), \ \overset{\infty}{\underset{n=1}{\bullet}} f_n(x) = \inf_n f_n(x), \ x \in X,$$

и, следовательно, ее нижний $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sup\limits_N \inf\limits_{n\geq N} f_n(x)$ и верхний $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \inf\limits_N \sup\limits_{n\geq N} f_n(x)$ пределы, а также ее предел $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in X$, если последний существует.

Определение 1. *Определим интеграл $p(\cdot)$, как линейную счетно-аддитивную функцию на $\mathcal{L}(X)$, принимающую значения в $\mathcal{L}$, то есть для любых $f(\cdot), g(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ и любых $a, b \in \mathcal{L}$:*

$$p(a \bullet f(\cdot)) + p(b \bullet g(\cdot)) = (a \bullet (f(\cdot))) + (b \bullet (g(\cdot))) \tag{1}$$

и для любой последовательности $\{f_n(\cdot)\} \subset \mathcal{L}(X)$

$$p\left(\sup_n f_n(\cdot)\right) = p\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} f_n(\cdot)\right) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} p(f_n(\cdot)) = \sup_n p(f_n(\cdot)). \tag{2}$$

Интеграл $p(\cdot)$ обладает следующими свойствами:

Теорема 1. *[1] Интеграл $p(\cdot) : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$*

1. *монотонно не убывает: если $f(\cdot) \geq g(\cdot)$, то $p(f(\cdot)) \geq p(g(\cdot))$;*

2. *непрерывна относительно монотонно неубывающей последовательности: если $f_n(\cdot) \leq f_{n+1}(\cdot)$, $n = 1, 2, \ldots$, то $p(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\cdot)) \leq \lim\limits_{n\to\infty} p(f_n(\cdot))$; в частности, если $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq \ldots \to 1(x) \equiv 1$, $x \in X$, то $\lim\limits_{n\to\infty} p(f_n(\cdot)) = p(1(\cdot))$, причем далее будем считать $p(1(\cdot)) = 1$ (условие нормировки);*

3. *полунепрерывна снизу: если $\{f_n(\cdot)\} \subset \mathcal{L}(X)$, то $p(\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} p(f_n(x))$; в частности, если $\{f_n(\cdot)\}$ сходится, то $p(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} p(f_n(x))$.*

Используя sup в качестве интеграла, а min в качестве произведения, определим $p(f(\cdot)) = p_\varphi(f(\cdot))$, как "скалярное произведение" фиксированной функции $\varphi(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ на $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$:

$$p_\varphi(f(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min(f(x), \varphi(x)). \tag{3}$$

Функция $p_\varphi(\cdot)$ линейная, счетно-аддитивная, так как для нее выполняется (1), (2). Также $p_\varphi(\cdot)$, как и в общем случае $p(\cdot)$, полунепрерывна снизу.

2 Нечеткие множества и нечеткие элементы.

В первой части лекций по теории возможности мы описали нечеткость, основываясь на понятии нечеткого множества [3]. Любое подмножество A множества X можно задать с помощью его характеристической функции $\chi_A(\cdot) : X \to \{0, 1\}$, определив $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\chi_A(x) = 0$, если $x \in X \setminus A$. **Нечеткое множество** также определяется его характеристической функцией $\mu_A(\cdot) : X \to [0, 1]$, значение которой определяется, как степень включения $x \in X$ в A. Операции над нечеткими множествами определены в первой части лекций.

Еще одна точка зрения на нечеткость, также позволяющая охарактеризовать ее в терминах возможности, опирается на понятие нечеткого элемента, аналогичное понятию случайного элемента в теории вероятностей. **Нечеткий элемент** ξ, принимающий значения в X, может быть охарактеризован распределением возможностей его значений – функцией $\varphi^\xi(\cdot) : X \to [0, 1]$, значение $\varphi^\xi(x)$ которой для каждого $x \in X$ определяет возможность равенства $\xi = x$.

Обе эти точки зрения о нечеткости (основанные на понятии нечеткого события и нечеткого элемента) можно согласованно представить в теории возможностей, используя интеграл $p_{\varphi^\xi}(\cdot)$. Итак, существует три класса событий.

Первый класс образуют события $\xi \in A$, в которых участвует нечеткий элемент ξ и четкое множества $A \in \mathcal{A}$. Возможность события этого класса $P(\xi \in A) = p(\chi_A(\cdot)) = \sup\limits_{x \in X} \min(\chi(x), \varphi^\xi(x)) = \sup\limits_{x \in X} \varphi^\xi(x)$, которая совпадает с формулой (6) первой части лекций. Нечеткий элемент ξ определяет интеграл $p_{\varphi^\xi}(\cdot)$ и, как правило, фиксирован, переменным является множество $A \in \mathcal{A}$, определяющее событие $\xi \in A$, или, короче, – событие A.

Второй класс образуют события $x \in A$, в которых участвует четкий элемент $x \in X$ и нечеткое множество A. Возможность события этого класса $P(x \in A) = \mu_A(x)$ – характеристическая функция множества A и совпадает с формулой (5) из первой части лекций.

Наконец, третий класс образуют события $\xi \in A$, в которых участвуют нечеткий элемент ξ и нечеткое множество A. Возможность события этого класса $P(\xi \in A) = p_{\varphi^\xi}(\mu_A(\cdot)) = \sup\limits_{x \in X} \min(\mu(x), \varphi^\xi(x))$, которая совпадает с формулой (7) первой части лекций. Значение min определяет возможность события $(\xi = x) \cap (x \in A)$, а величина sup определяет возможность события $\xi \in A$. Как и в случае событий первого класса нечеткий элемент ξ определяет интеграл $p_{\varphi^\xi}(\cdot)$, аргументом которого является характеристическая функция нечеткого множества A, определяющего событие $\xi \in A$. Поскольку нечеткий элемент ξ обычно фиксирован, $\mu_A(\cdot)$ можно называть и характеристической функцией события $\xi \in A$.

3 Мера возможности: определение и свойства.

Пусть $\mathcal{A}$ – σ-алгебра всех подмножеств $A_1, \ldots, A_n$ множества X, $n = 1, 2, \ldots$. Всякое множество $A \in \mathcal{A}$ с характеристической функцией $\chi_A(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ будем называть **событием**. Любая функция $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ определяет **нечеткое событие**.

Определение 2. *Функцию $P(\cdot) : \mathcal{A} \to \mathcal{L}$ назовем возможностной мерой или возможностью, величину $P(A) = p(\chi_A(\cdot))$ назовем мерой возможности события $A \subset \mathcal{A}$ или возможностью A. Соответственно величину $p(f(\cdot))$ назовем возможностью нечеткого события, заданного характеристической функцией $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$. Шкалу $\mathcal{L} = \{[0, 1], \leq, +, \bullet\}$ назовем шкалой значений возможности.*

Теорема 2. *[1] Возможность $P(A)$, $A \in \mathcal{A}$ обладает следующими свойствами:*

1. *$P(A \cup B) = p(\max(\chi_A(\cdot), \chi_B(\cdot))) = \max(P(A), P(B)) = P(A) + P(B)$, $A, B \subset \mathcal{A}$ (аддитивность);*

2. *$P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sup_n P(A_n)$, $A_i \subset \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots$ (счетная аддитивность);*

3. *если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$ (монотонность) и, как следствие, $P(A \cap B) = p((\chi_A \bullet \chi_B)(\cdot)) \leq \min(P(A), P(B))$;*

4. *если $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{N} \bigcap\limits_{n \geq N} A_n = \bigcap\limits_{N} \bigcup\limits_{n \geq N} A_n$, то $P(A) = \sup\limits_{N} P\left(\bigcap\limits_{n\geq N} A_n\right) \leq \sup\limits_{N} \inf\limits_{n\geq N} P(A_n) = \liminf\limits_{n\to\infty} P(A_n)$ (полунепрерывность снизу).*

Из первого свойства возможности в теореме 2 следует, что любые два события $A, B \subset \mathcal{A}$ с точки зрения их возможности аналогичны несовместным событиям в теории вероятности.

Четвертое свойство возможности означает, что значение $P(\emptyset)$ нельзя определить по непрерывности, поскольку $P(A)$ не непрерывна при $A = \emptyset$. Значение, $P(A)$ можно определить, как произвольное число из $[0, \inf\limits_{A\subset\mathcal{A}} P(A)]$. Далее предполагаем $P(\emptyset) = 0$. С другой стороны, если $X = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, то $P(X) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} P(A_n)$. В то же время $P(A_n) \leq P(X)$, $n = 1, 2, \dots$ и, потому $P(X) \geq \limsup\limits_{n\to\infty} P(A_n)$. Следовательно, последовательность $P(A_1), P(A_2), \dots$ сходится к $P(X)$ и $P(\cdot)$ непрерывна в X. Далее в соответствии с нормировкой $p(\cdot)$ $P(X) = p(1(\cdot)) = 1$.

Тройку $(X, \mathcal{A}, P)$ будем называть **возможностным пространством**.

Возвращаясь к интегралу $p(\cdot) = p_\varphi(\cdot)$ (3) заметим, что в этом случае возможность события $A \subset \mathcal{A}$, $A \neq \emptyset$

$$P(A) = P_\varphi(A) = \sup_{x\in A} \varphi(x),\ P(\emptyset) = 0. \tag{4}$$

Здесь $\varphi(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, $\sup\limits_{x\in X} \varphi(x) = 1$. Эту функцию естественно назвать распределением возможности $P(\cdot)$.

Замечание 1. *Также в работе [1] рассматривается понятие меры необходимости нечеткого события и устанавливается связь между ней и мерой возможности.*

4 Нечеткий элемент: независимость, условное распределение.

Как отмечено выше, для моделирования нечеткости привлекаются математические понятия нечеткого элемента, нечеткого множества и возможности. Нечеткое множество и возможность мы рассмотрели. Остановимся подробнее на понятии нечеткого элемента. В теории возможностей нечеткий элемент играет ту же роль, что и случайный элемент играет в теории вероятностей.

Определение 3. *Пусть $(X, \mathcal{A}, P)$ – возможностное пространство, $(Y, \mathcal{B})$ – измеримое пространство, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – σ-алгебры подмножств X и Y соответственно. Нечетким элементом на $(X, \mathcal{A}, P)$ со значением в $(Y, \mathcal{B})$ называется любая $\mathcal{A}, \mathcal{B}$-измеримая функция $\eta(\cdot) : X \to Y$. ($\mathcal{A}, \mathcal{B}$-измеримость означает: $B \in \mathcal{B} \Rightarrow A = \eta^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.)*

Определение 4. *Нечеткие элементы ξ и η, определенные на возможностном пространстве $(Z, \mathcal{C}, P)$ и принимающие значения в измеримых пространствах $(X, \mathcal{A})$ и $(Y, \mathcal{B})$ соответственно, называются независимыми (по возможности), если для любых $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ события $\xi \in A$ и $\eta \in B$ P-независимы, т.е. если*

$$P(\xi \in A, \eta \in B) = \min(P(\xi \in A), P(\eta \in B)).$$

Здесь предполагается, что на $(Z, \mathcal{C}, P)$ определен нечеткий элемент ζ, $P(Q) \equiv P(\zeta \in Q)$, $Q \in \mathcal{C}$, $\xi : Z \to X$, $\eta : Z \to Y$ – функции $\zeta \in Z$: $\xi = \xi(\zeta)$, $\eta = \eta(\zeta)$, и по определению

$$P(\xi \in A) \equiv P(\zeta \in \xi^{-1}(A)),$$
$$P(\eta \in B) \equiv P(\zeta \in \eta^{-1}(B)),$$
$$P(\xi \in A, \eta \in B) \equiv P(\zeta \in (\xi^{-1}(A) \cap \eta^{-1}(B))).$$

Лемма 1. *[1] §11 Пусть $\varphi^{\xi,\eta}(x,y)$, $x \in X$, $y \in Y$ – распределение нечеткого вектора (ξ,η). Нечеткие элементы ξ и η независимы, если и только если $\varphi^{\xi,\eta}(x,y) = \min(\varphi^{\xi}(x), \varphi^{\eta}(y))$, где $\varphi^{\xi}(x) = \sup\limits_{y\in Y} \varphi^{\xi,\eta}(x,y)$, $x \in X$, $\varphi^{\xi}(x) = \sup\limits_{x\in X} \varphi^{\xi,\eta}(x,y)$, $y \in Y$ – маргинальные распределения ξ и η соответственно.*

Определение 5. *Условным распределением нечеткого элемента $\eta \in Y$ при условии $\xi = x \in X$ (условным относительно ξ распределения η) называется любое решение $\varphi^{\eta|\xi}(y|x)$ уравнения*

$$\min(\varphi^{\eta|\xi}(y|x), \varphi^{\xi}(x)) = \varphi^{\xi,\eta}(x,y),\ x \in X,\ y \in Y, \tag{5}$$

где $\varphi^{\xi}(x) = \sup\limits_{y\in Y} \varphi^{\xi,\eta}(x,y)$, $x \in X$, – маргинальное распределение $\xi \in X$.

Неравенство $\varphi^{\xi}(x) \geq \sup\limits_{y\in Y} \varphi^{\xi,\eta}(x,y)$ гарантирует разрешимость уравнения (5) при любых $x \in X$, $y \in Y$, а именно: $\varphi^{\eta|\xi}(y|x) = \varphi^{\xi,\eta}(x,y)$, если $\varphi^{\xi}(x) > \varphi^{\xi,\eta}(x,y)$, $\varphi^{\eta|\xi}(y|x) \geq \varphi^{\xi,\eta}(x,y)$, если $\varphi^{\xi}(x) = \varphi^{\xi,\eta}(x,y)$.

5 Связь дискретного вероятностного и дискретного возможностного пространств.

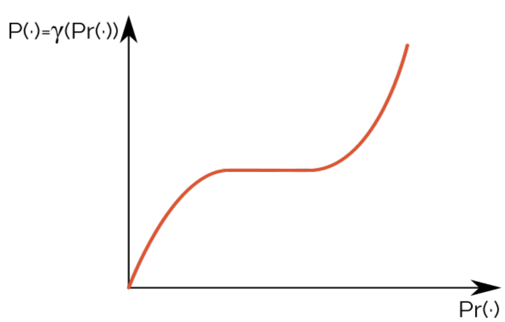
Рассмотрим стохастический эксперимент $\mathcal{E}$, математической моделью которого является вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$, для простоты – дискретное. Здесь $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N, \ldots\}$ – конечное или счетное множество элементарных исходов $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}$ – σ-алгебра всех подмножеств Ω, представляющих все мыслимые исходы $\mathcal{E}$, $\Pr(\cdot) : \mathcal{A} \to [0,1]$ – вероятность, заданная своими значениями на элементарных исходах $\Pr(\{\omega_i\}) = p_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, и определяющая вероятность любого исхода $A \in \mathcal{A}$ эксперимента равенством $\Pr(A) = \sum\limits_{i:\omega_i \in A} p_i$.

Предположим, что эксперимент $\mathcal{E}$ обладает статистической устойчивостью, то есть может быть независимо воспроизведен любое число раз. Как известно, при достаточно слабых ограничениях на вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ с увеличением числа раз независимо воспроизведенного эксперимента $\mathcal{E}$ вероятность любого уклонения частоты исхода A от его вероятности стремится к нулю. Этот факт лежит в основе так называемой частотной интерпретации вероятности, ее статистического толкования, согласно которому в длинной последовательности независимых повторений стохастического эксперимента частота его исхода оценивается вероятностью этого исхода. Следовательно, вероятность рассматривается, как элемент предвидения, прогнозирования частоты того или иного исхода эксперимента при многократных его повторениях, но не исхода каждого эксперимента. Возникает вопрос: что можно сказать по поводу предсказания исходов эксперимента $\mathcal{E}$, в частности, о возможностях исходов?

Определение 6. *Возможностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ будем называть согласованным с вероятностным пространством $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$, если для любого $A, B \in \mathcal{A}$*

$$\Pr(A) \geq \Pr(B) \Rightarrow P(A) \geq P(B).$$

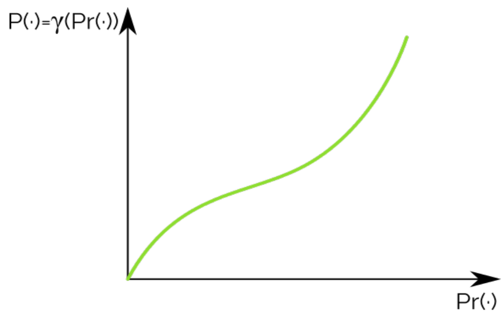
Определение 6 эквивалентно существованию функции $\gamma : [0,1] \to [0,1]$ непрерывной на $(0,1]$ и неубывающей такой, что для любого $A \in \mathcal{A}$ $P(A) = \gamma(\Pr(A))$, $\gamma(0) = 0$.



Определение 7. *Возможностное пространство* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *будем называть максимально согласованным с вероятностным пространством* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$*, если* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *согласованно с* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$ *и для любого другого* $(\Omega, \mathcal{A}, P')$*, согласованного с* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$*, выполняется условие:*

$$\forall A, B \in \mathcal{A} : P'(A) > P'(B) \Rightarrow P(A) > P(B).$$

Определение максимальной согласованного возможностного пространства эквивалентно существованию строго возрастающей функции $\gamma : [0,1] \to [0,1]$ непрерывной на $(0,1]$ такой, что для любого $A \in \mathcal{A}$ $P(A) = \gamma(\mathrm{Pr}(A))$, $\gamma(0) = 0$:



Перенумеруем элементы Ω таким образом, чтобы выполнялась цепочка неравенств:

$$\mathrm{Pr}(\{\omega_1\}) \geq \mathrm{Pr}(\{\omega_2\}) \geq \ldots \geq \mathrm{Pr}(\{\omega_N\}) \geq \ldots > 0, \tag{6}$$

исключив элементы с нулевой вероятностью. Условия (6) далее всюду предполагаются выполнеными. Обозначим $p_k = P(\{\omega_k\})$, $\mathrm{pr}_k = \mathrm{Pr}(\{\omega_k\})$ и $F_k = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{pr}_j$, $j = 1, 2, \ldots$, $F_0 \equiv 0$.

Теорема 3. *[2] Для того, чтобы пространство* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *было согласованны (максимально согласованным) с пространством* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия согласованности (максимальной согласованности):*

$$p_1 = 1,\ p_k = p_{k+1},\ \textit{если}\ \mathrm{pr}_1 \leq 1 - F_k,\ k = 1, 2, \ldots,$$

$$p_1 = 1,\ p_k \geq p_{k+1}\ (p_k > p_{k+1}),\ \textit{в противном случае},\ k = 1, 2, \ldots.$$

В третьей части лекций по теории возможностей мы рассмотрим задачу узнавания цифр, изображения которых искажены шумом.

Литература

[1] Ю.П. Пытьев, Возможность. Элементы теории и применения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.

[2] Ю.П. Пытьев, Г.С. Животников, Теоретико-вероятностные и теоретико-возможностные модели распознавания. Сравнительный анализ. Журнал "Интеллектуальные системы" , М., т. 6, № 1-4, 2001.

[3] L.A. Zadeh, Fuzzy sets,Information and Control, V.8, 1965.