

Применение теории возможностей.

Рассмотрим задачу распознавания цифр, изображения которых искажены шумом. Известно начертание и размер цифр. Моделью шума служит нечеткий элемент. Строится стратегия, согласно которой возможность того, что предъявляемое для распознавания изображение является искаженным изображением цифры k , принимает максимальное значение. В качестве реализации нечеткого элемента выбирается исход стохастического эксперимента. Затем, для совокупности из M независимых копий такого нечеткого элемента по описанному ниже алгоритму получено распределение вероятностей M -мерной случайной величины.

В данной лекции используется теория из второй части лекций, а также результаты из работы [1].

1 Теоретико-возможностная модель распознавания.

Изображением g будем называть функцию $g_{..} : \{(i, j), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\} \rightarrow \mathbb{R}^1$, ее значение $g_{ij} \in \mathbb{R}^1$ назовем яркостью изображения g в точке (i, j) поля зрения. Изображение g можно представить матрицей $m \times n$ с элементами $g_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$.

Определим операции над изображениями так же, как определяются операции над матрицами в линейной алгебре: умножение изображения g на число $\alpha \in \mathbb{R}^1$

$$(\alpha g)_{ij} = \alpha g_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$$

и сумму изображений g и f

$$(f + g)_{ij} = f_{ij} + g_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}.$$

Определим также скалярное произведение изображений f и g :

$$(f, g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{ij} g_{ij}.$$

Заметим, что изображение g может рассматриваться как вектор M -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^M , $M = n \times m$, при этом значения g_{ij} являются его координатами $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$.

Рассмотрим задачу распознавания цифр, изображения которых искажены шумом, в которой известно начертание и размер цифр. Пусть дана совокупность десяти эталонных изображений цифр $f^{(k)} = \{f_{ij}^{(k)}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\} \in \mathbb{R}^M$, $k = \overline{0, 9}$, на которых имеется два уровня яркости: "белый", соответствующий значению $f_{ij}^{(k)} = 1$, и "черный" – $f_{ij}^{(k)} = 0$.

1.1 Байесовское решение.

Предположим, что для распознавания предъявляется изображения g , полученное путем добавления к одному из эталонных изображений $f^{(k)}$, выбранному случайно, аддитивного шума $\nu = \{\nu_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\} \in \mathbb{R}^M$ по схеме

$$g = f^k + \nu. \quad (1)$$

Если координаты вектора ν независимы и одинаково распределены, а $\text{pr}(\cdot)$ – плотность распределения вероятностей значений координат ν_{ij} , то плотность условного распределения вероятностей значений яркости в точках поля зрения $g = g_{ij} \in \mathbb{R}^M$ при условии, что оно формировалось на основе эталонного изображения $f^{(k)}$ цифры "k" по схеме (1), равна

$$\text{pr}(g|k) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \text{pr}(g_{ij} - f_{ij}^{(k)}).$$

Для построения байесовского решающего правила независимость случайных величин ν_{ij} несущественна. Необходимо только, чтобы была известна плотность их совместного распределения $\text{pr}_{\nu}(\cdot)$. Тогда

$$\text{pr}(g|k) = \text{pr}_{\nu}(g - f^{(k)}).$$

Пусть $\Pr("k")$ – априорная вероятность того, что предъявленное для распознавания изображение g будет цифрой " k ", $k = \overline{0,9}$. По формуле Байеса вероятность того, что предъявленное изображение g является искаженным изображением цифры " k " равна

$$\Pr("k" | g) = \frac{\text{pr}(g|"k")\Pr("k")}{\sum_{l=0}^9 \text{pr}(g|"l")\Pr("l")}, \quad k = \overline{0,9}. \quad (2)$$

Согласно стратегии Байеса необходимо найти такой номер k^* , при котором вероятность (2) принимала бы максимальное по k значение, то есть

$$k^* = k^*(g) = \arg \max_{k=\overline{0,9}} \Pr("k" | g).$$

Для простоты предположим, что $\Pr("k") = 1/10$, $k = \overline{0,9}$. Тогда задача $\Pr("k" | g) \sim \max_k$ равносильна задаче $\text{pr}(g|"k") \sim \max_k$. Следовательно,

$$k^* = \arg \max_{k=\overline{0,9}} \text{pr}(g|"k") = \arg \max_{k=\overline{0,9}} \text{pr}_\nu(g - f^{(k)}).$$

1.2 Теоретико-возможностный аналог байесовской стратегии.

Предъявляемое для распознавания изображение $g \in \mathbb{R}^M$ будем считать значением нечеткого вектора η , который формируемся как сумма вектора $f^{(\varkappa)}$ – эталонного изображения одной из цифр – и нечеткого вектора $\nu \in \mathbb{R}^M$, моделирующего шум, где \varkappa – нечеткий элемент, имеющий дискретное распределение возможностей и принимающий значения от 0 до 9. Для простоты будем считать, что $P(\varkappa = k) = 1$, $k = \overline{0,9}$, то есть все изображения цифр, предъявляемые для распознавания, равновозможны. Пусть задано распределение возможностей $\varphi^{\nu_{ij}}(\cdot) = \varphi(\cdot)$ для координат вектора шума ν , $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, и координаты ν независимы в теоретико-возможностном смысле. Выражение для условного распределения нечеткого элемента $\eta = g$ при условии $\varkappa = k$ имеет вид

$$\varphi^{\eta|\varkappa}(g|k) = \min_{i=\overline{1,n}} \min_{j=\overline{1,m}} \varphi(g_{ij} - f_{ij}^{(k)}), \quad g \in \mathbb{R}^M, \quad k = 0, \dots, 9.$$

Согласно Определению 5 из второй части лекций

$$P(\varkappa = k, \eta = g) = \min(\varphi^{\eta|\varkappa}(g|k), P(\varkappa = k)).$$

Учитывая условие о равновозможности, т.е. $P(\varkappa = k) = 1$ для любого $k = 0, \dots, 9$, следует

$$P(\varkappa = k, \eta = g) = \min_{i=\overline{1,n}} \min_{j=\overline{1,m}} \varphi(g_{ij} - f_{ij}^{(k)}).$$

Как и в случае байесовской стратегии, решение о принадлежности предъявленного для распознавания изображения g к классу $k^* = k^*(g)$ принимается по максимуму возможности $P(\varkappa = k, \eta = g)$, то есть

$$k^* = \arg \max_{k=\overline{0,9}} P(\varkappa = k, \eta = g).$$

1.3 Статистическое моделирование нечеткого элемента.

При исследовании свойств теоретико-возможностных решений на ЭВМ в качестве реализации нечеткого элемента выбирается исход стохастического эксперимента. Если необходимо получить реализацию нескольких нечетких элементов, стохастический эксперимент должен проводиться со случайным вектором соответствующей размерности. При этом возникает вопрос: какому классу должно принадлежать распределение вероятностей случайного вектора, чтобы моделируемый с его помощью нечеткий вектор имел заранее заданное распределение возможностей?

Как и в предыдущей части лекций пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M \dots\}$ – конечное или счетное множество элементарных исходов стохастического эксперимента, \mathcal{A} – σ -алгебра всех подмножеств Ω , $\Pr(\cdot)$, $P(\cdot)$ – вероятностная и возможностная меры соответственно, заданные на элементах \mathcal{A} и принимающие значения в $[0, 1]$. Тройки

$(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ и (Ω, \mathcal{A}, P) – вероятностное и возможностное пространства. Перенумеруем элементы Ω так, чтобы выполнялась цепочка неравенств

$$\Pr(\{\omega_1\}) \geq \Pr(\{\omega_2\}) \geq \dots \geq \Pr(\{\omega_M\}) \geq \dots > 0, \quad (3)$$

исключив элементы с нулевой вероятностью. Условия (3) далее всюду предполагаются выполненными. Обозначим, как и ранее во второй части лекций

$$\begin{aligned} p_k &= P(\{\omega_k\}), \\ \text{pr}_k &= \Pr(\{\omega_k\}), \quad \sum_k \text{pr}_k = 1, \quad \text{pr}_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, \\ F_k &= \sum_{j=1}^k \text{pr}_j, \quad k = 0, 1, \dots, \quad F_0 \equiv 0. \end{aligned} \quad (4)$$

С помощью теоремы 3 из второй части лекций строится распределение нечеткого элемента, максимально согласованное с дискретизированной версией нормального распределения вероятности $N(0, \sigma^2)$.

Нетрудно видеть, что задача моделирования совокупности конечного числа M независимых нечетких элементов с одинаковым дискретным распределением сводится к моделированию одного нечеткого элемента с дискретным распределением. В самом деле, пусть $(\Omega^M, \mathcal{A}^M, P_M)$ – возможностное пространство, где $\Omega^M = \Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega$ – прямое произведение M счетных множеств, \mathcal{A}^M – σ -алгебра всех подмножеств такого прямого произведения, $P_M(\cdot)$ – возможность, определенная на \mathcal{A}^M и обладающая следующим свойством:

$$P_M(\{\omega_{k_1}\} \times \dots \times \{\omega_{k_M}\}) = \min_{i=1, \dots, M} \varphi(\omega_{k_i}),$$

где $\varphi(\cdot)$ – одно и тоже дискретное распределение для всех M нечетких элементов. Тогда нечеткие элементы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M$, каждый из которых принимает значения в Ω с возможностью $P(\xi_k = \omega_l) = \varphi(\omega_l) = p_l$, образуют нечеткий вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M) \in \Omega_M$ с распределением возможностей $\varphi^\xi(x) = P_M(\{x\})$, $x \in \Omega^M$. Его координаты являются независимыми в теоретико-возможностном смысле.

Построим вероятностное пространство $(\Omega^M, \mathcal{A}^M, \Pr_M)$ такое, что определенное выше возможностное пространство максимально с ним согласованно. Пусть случайный вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_M)$ контролируется распределением вероятностей $\text{pr}^\eta(\cdot)$, $\text{pr}^\eta(x) = \Pr^\eta(\{x\})$, $x \in \Omega^M$. Реализацию случайного вектора η можно интерпретировать, как значение независимого вектора ξ , каждый элемент которого имеет распределение возможностей φ .

Для примера смоделируем два независимых одинаково распределенных нечетких элемента ξ_1 и ξ_2 , принимающих значения в $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ с возможностями $P(\xi_i = j) = p_j$, $i = 1, 2$, $j = \overline{1, 4}$. Потребуем, чтобы

$$1 = p_1 > p_2 > p_3 > p_4 > 0. \quad (5)$$

Совместное распределение этих нечетких элементов или распределение нечеткого элемента $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, принимающего значения в Ω^2 можно изобразить следующим образом:

	1	2	3	4
1	p_1	p_2	p_3	p_4
2	p_2	p_2	p_3	p_4
3	p_3	p_3	p_3	p_4
4	p_4	p_4	p_4	p_4

Таблица 1: На пересечении строки i и столбца j стоит возможность множества $\{\omega_i\} \times \{\omega_j\} \subset \Omega^2$, $i, j = \overline{1, 4}$.

Значением нечеткого вектора $\xi \in \Omega^2$ следует считать одну реализацию вектора $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \Omega^2$, распределение вероятностей которого выглядит, например, так:

	1	2	3	4
1	pr_1	pr_2	pr_3	pr_4
2	pr_2	pr_2	pr_3	pr_4
3	pr_3	pr_3	pr_3	pr_4
4	pr_4	pr_4	pr_4	pr_4

Таблица 2: На пересечении строки i и столбца j стоит вероятность множества $\{\omega_i\} \times \{\omega_j\} \subset \Omega^2$, $i, j = \overline{1, 4}$.

причем

$$\frac{1}{2} < pr_1 < 1,$$

$$\frac{1 - pr_1}{4} < pr_2 < \frac{1 - pr_1}{3}, \quad (6)$$

$$\frac{1 - pr_1 - 3pr_2}{6} < pr_3 < \frac{1 - pr_1 - 3pr_2}{5}, \quad (7)$$

$$pr_4 = \frac{1 - pr_1 - 3pr_2 - 5pr_3}{7}. \quad (8)$$

Равенство (8), очевидно, обеспечивает нормировку. Покажем, как получаются, например, неравенства (6). Рассмотрим множества $A = \{\omega_2\} \times \{\omega_2\} = \{\omega_2\}^2$ и $B = (\Omega \times \Omega) \setminus ((\{\omega_1\} \times \{\omega_1\}) \cup (\{\omega_1\} \times \{\omega_2\}) \cup (\{\omega_2\} \times \{\omega_1\}) \cup (\{\omega_2\} \times \{\omega_2\})) = \Omega^2 \setminus \{\omega_1, \omega_2\}^2$. Для них, согласно Таблице 1 и условию (5), $P_2(A) = p_2 > p_3 = P_2(B)$. Из этого неравенства и по определению согласованности возможностного пространства с вероятностным следует, что $Pr_2(A) > Pr_2(B)$. Согласно Таблице 2, $Pr_2(A) = pr_2$, а $Pr_2(B) = 1 - pr_1 - 3pr_2$, откуда следует левое неравенство в (6). Правое неравенство в (6) следует из требования, что $Pr_2(\{\omega_1, \omega_2\}^2) = pr_1 + 3pr_2 < 1$. Поскольку множество A имеет минимальную вероятность среди всех непустых множеств, включенных в $\{\omega_1, \omega_2\}^2$, а множество B – максимальную вероятность среди множеств, включенных в $\Omega^2 \setminus \{\omega_1, \omega_2\}^2$, то из утверждения

$$P_2(A) > P_2(B) \Rightarrow Pr_2(A) > Pr_2(B)$$

следует максимальная согласованность возможностного пространства $(\Omega^2, \mathcal{A}^2, P_2)$ с вероятностным $(\Omega^2, \mathcal{A}^2, Pr_2)$. А именно, не существует множеств A' и B' , вероятности которых удовлетворяли бы неравенству $Pr_2(A) > Pr_2(A') > Pr_2(B') > Pr_2(B)$, а возможности были бы одинаковые (см. определение максимальной согласованности во второй части лекций). Неравенства (7) получаются аналогичным образом.

На практике при стохастическом моделировании нечетких элементов на ЭВМ вместо совместных распределений вероятностей удобнее использовать маргинальные и условные распределения. В рассмотренном примере маргинальные распределения вероятностей случайных величин η_1 и η_2 совпадают и равны

$$Pr(\eta_k = i) = \sum_{j=1}^4 \min(pr_i, pr_j), \quad i \in \Omega, \quad k = 1, 2,$$

а условное распределение η_2 при условии η_1

$$Pr(\eta_2 = i | \eta_1 = j) = \frac{\min(pr_j, pr_i)}{\sum_{k=1}^4 \min(pr_k, pr_j)}, \quad i, j = \overline{1, 4},$$

зависит от значения η_1 , то есть случайные величины, которыми моделируются независимые в теоретико-возможностном смысле нечеткие элементы, должны быть зависимы в теоретико-вероятностном. Получен следующий результат.

Лемма 1. [2] Для стохастического моделирования M независимых одинаково распределенных нечетких элементов ξ_k , $k = 1, \dots, M$, принимающих значения в конечном множестве $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$ с вероятностями $1 > p_1 > \dots > p_m > 0$, можно использовать M случайных величин η_k , $k = 1, \dots, M$, таких, что маргинальное распределение каждой из них равно

$$Pr(\eta_k = \omega_j) = \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_{M-1}=1}^m \min(pr_j, pr_{i_1}, \dots, pr_{i_{M-1}}), \quad j = 1, \dots, m,$$

а условные распределения

$$\Pr(\eta_{k+1} = \omega_{j_{k+1}} | \eta_1 = \omega_{j_1}, \dots, \eta_k = \omega_{j_k}) = \frac{\sum_{i_{k+2}=1}^m \dots \sum_{i_M=1}^m \min(\text{pr}_{j_1}, \dots, \text{pr}_{j_{k+1}}, \text{pr}_{i_{k+2}}, \dots, \text{pr}_{i_M})}{\sum_{i_{k+1}=1}^m \dots \sum_{i_M=1}^m \min(\text{pr}_{j_1}, \dots, \text{pr}_{j_k}, \text{pr}_{i_{k+1}}, \dots, \text{pr}_{i_M})},$$

$$k = 1, \dots, M-1, j_k = 1, \dots, m,$$

причем

$$\frac{1 - \sum_{r=1}^{k-1} (r^M - (r-1)^M) \text{pr}_r}{k^M - (k-1)^M + 1} < \text{pr}_k < \frac{1 - \sum_{r=1}^{k-1} (r^M - (r-1)^M) \text{pr}_r}{k^M - (k-1)^M},$$

где $k = 1, \dots, m-1$, а pr_m определяется из условия нормировки:

$$(m^M - (m-1)^M) \text{pr}_m = 1 - \sum_{r=1}^{m-1} (r^M - (r-1)^M) \text{pr}_r.$$

При этом распределение нечеткого вектора (ξ_1, \dots, ξ_M) будет максимально согласованно с распределением случайного вектора (η_1, \dots, η_M) .

2 Результаты.

Размер поля зрения для изображений был выбран равным 100×60 , изображения эталонных цифр имели всего два уровня яркости. К исходному изображению добавлялся аддитивный шум, имеющий распределение возможностей, в некотором смысле согласованные с нормальным распределением вероятностей $N(0, \sigma^2)$. Точнее, в соответствии с теоремой 3 второй части лекций было построено распределение нечеткого элемента, максимально согласованное с дискретизированной версией нормального распределения вероятностей $N(0, \sigma^2)$. Затем для совокупности из M независимых копий такого нечеткого элемента по алгоритму, указанному в лемме1, было получено распределение вероятностей M -мерной случайной величины, координаты которой оказались зависимыми в вероятностном смысле, и их реализации отвечали значениям моделируемого шума. Дисперсия σ^2 "исходного" нормального распределения вероятностей была названа "эффективной шириной" распределения возможностей моделируемого таким образом нечеткого элемента.

Результаты вычисленного эксперимента, в котором был реализован приведенный выше метод распознавания, сравнивались с результатами вычислительных экспериментов, основанных на морфологическом традиционном алгоритме и его теоретико-возможностном варианте (см. подробнее в [2]).

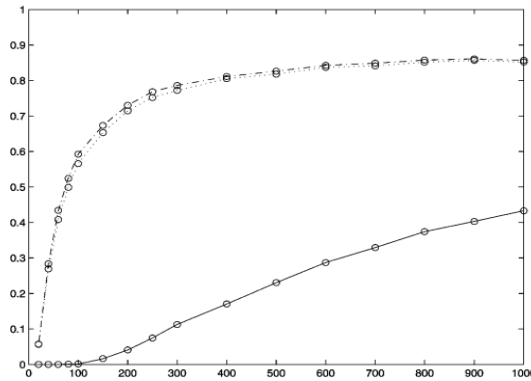


Рис. 1: Зависимость ошибочных решений от "эффективной ширины" распределения возможностей нечеткого шума. Для получения каждой точки проведено 1000 испытаний. Сплошная линия соответствует нечеткому байесовскому алгоритму, штрихпунктир – традиционному морфологическому решению, пунктир – теоретико-возможностному варианту морфологического решения.

Помехоустойчивость нечеткого аналога байесовского алгоритма оказалась существенно выше, чем у алгоритмов, основанных на морфологических методах. Это можно объяснить тем, что статистические свойства

шума, моделирующего нечеткий вектор с независимыми координатами, не удовлетворяют требованиям, которые предъявляются к шуму для обеспечения асимптотической оптимальности морфологических методов (а именно, координаты вектора шума зависимы в теоретико-вероятностном смысле, см. лемму 1). Вместе с тем нечеткий аналог байесовского решения полностью учитывает такую модель формирования изображений, что и обеспечивает его высокую эффективность.

Данные результаты также могут быть применены для распознавания речи.

Литература

- [1] Ю.П. Пытьев, Возможность. Элементы теории и применения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
- [2] Ю.П. Пытьев, Г.С. Животников, Теоретико-вероятностные и теоретико-возможностные модели распознавания. Сравнительный анализ. Журнал "Интеллектуальные системы", М., т. 6, № 1-4, 2001.